İki Ortalama Farkının Güven Aralığı

Ana kütle varyansı biliniyorsa ;
İki ortalama arasındaki farkın dağılımına ilişkin Z değişkeni:

$$\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_1 \pm \mu_2; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \Rightarrow Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Güven aralığı ifadesinde yerine konulursa:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

İki ortalama arasındaki farkın güven aralığı;

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

İki Ortalama Farkının Güven Aralığı

Ana kütle varyansı biliniyorsa

- Ana kütle varyansının bilinmediği, fakat örnek hacminin 30 veya daha büyük olduğu (n≥30) durumlarda örnek varyansı (S^2)kullanılarak Z dağılımı yardımıyla güven aralığı oluşturulur.

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} < \frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}} < t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}) = 1-\alpha \longrightarrow t = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \longrightarrow S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} \longrightarrow Z = \frac{X-\mu}{S_x}$$

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}.S_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} < (\mu_1-\mu_2) < (\overline{X}_1-\overline{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}.S_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}$$

İki Ortalama Farkının Güven Aralığı

Ana kütle varyansı biliniyorsa

- Ana kütle varyansının bilinmediği, fakat örnek hacminin 30 veya daha büyük olduğu (n≥30) durumlarda örnek varyansı (S^2)kullanılarak Z dağılımı yardımıyla güven aralığı oluşturulur.
- Ana kütle varyansının bilinmediği durumlarda örnek hacmi 30 dan küçük (n<30) ise küçük örnek teorisine göre geliştirilen t dağılımı yardımıyla güven aralığı oluşturulur.

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} < \frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}} < t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}) = 1-\alpha \longrightarrow t = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \longrightarrow S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} \longrightarrow Z = \frac{X-\mu}{S_x}$$

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}.S_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} < (\mu_1 - \mu_2) < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}.S_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}$$

İki Ortalama Farkının Güven Aralığı

Örnek hacimlerine bağlı olarak;

$n_1 = n_2 = n$ ise $S_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{n}}$

$n_1 \neq n_2$ ise $S_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{S^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$

$S^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

Örnek

Örnek:
İçinde kusurlu ürün bulunduğu bilinen 8 koli ile kusurlu ürün bulunmadığı bilinen 9 kolinin ortalama ağırlıkları kg olarak aşağıda verilmiştir:

Kusurlu koli	125, 120, 119, 123, 126, 116, 118, 119
Kusursuz koli	130, 130, 128, 126, 125, 120, 132, 127, 128

%95 güven düzeyinde ortalamalar arasındaki farkın güven aralığını oluşturunuz.

$\bar{X}_1 \rightarrow$ kusursuz kolilerin ortalaması

$\bar{X}_2 \rightarrow$ kusurlu kolilerin ortalaması

$\bar{X}_1=127.33$ $S_1^2=12.25$ $\bar{X}_2=120.75$ $S_2^2=12.5$

$$S^2=\frac{(9-1)12.25+(8-1)12.5}{9+8-2}=12.4$$

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{12.4\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\right)}=1.71$$

$SD = n_1 + n_1 - 2 = 8 + 9 - 2 = 15 \quad 1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \quad \alpha/2 = 0.025 \quad t_{\alpha/2,SD} = t_{0.025;15} = 2.131$

$$(127.33 - 120.75) - 2.131 \cdot 1.71 < (\mu_1 - \mu_2) < (127.33 - 120.75) + 2.131 \cdot 1.71$$

$$2.94 < (\mu_1 - \mu_2) < 10.22$$

%95 güven düzeyinde (%5 hata payı ile) kusursuz ve kusurlu kolilerin ağırlıkları arasındaki farkın 2.94 kg ile 10.22 kg arasında olacağı söylenebilir(olması beklenir)

Ki-kare dağılımı

Örnek varyansı S^2, anakütle varyansı σ^2'nin bir nokta tahminidir.Varyanslarla ilgili tahminler ve testler χ^2(ki-kare) dağılımı kullanılarak yapılmaktadır.

$$\chi_k^2 \sim \sum Z_i^2$$

χ^2(ki-kare) dağılımının ortalaması; $E(\chi^2) = k$
χ^2(ki-kare) dağılımının varyansı; $V(\chi^2) = 2k$

Ki-kare dağılımı

Örnek varyansı S^2, anakütle varyansı σ^2'nin bir nokta tahminidir.Varyanslarla ilgili tahminler ve testler χ^2(ki-kare) dağılımı kullanılarak yapılmaktadır.Standart normal dağılmış Z_i değişkeninin kareleri toplamı k serbestlik dereceli χ^2 dağılımına uygunluk gösterir:

$$\chi_k^2 \sim \sum Z_i^2$$

χ^2(ki-kare) dağılımının ortalaması; $E(\chi^2) = k$
χ^2(ki-kare) dağılımının varyansı; $V(\chi^2) = 2k$

Ki-kare dağılımı

- Sağa uzun kuyruklu olan χ^2 dağılımı, serbestlik derecesi arttıkça simetrikleşmektedir (yani normale yaklaşmaktadır).

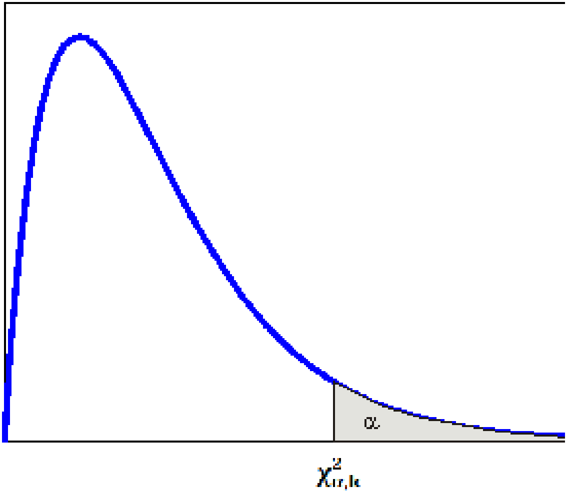
Ki-kare dağılımı

- Sağa uzun kuyruklu olan χ^2 dağılımı, serbestlik derecesi arttıkça simetrikleşmektedir (yani normale yaklaşmaktadır).
- χ^2 dağılımı için t dağılımına benzer şekilde tablolar oluşturulmuştur. Kullanılacak χ^2 tablosu P($\chi^2 > \chi_i^2$)$=\alpha$ olasılığını verecek şekilde düzenlenmiştir.

Ki-kare dağılımı

- Sağa uzun kuyruklu olan χ^2 dağılımı, serbestlik derecesi arttıkça simetrikleşmektedir (yani normale yaklaşmaktadır).
- χ^2 dağılımı için t dağılımına benzer şekilde tablolar oluşturulmuştur. Kullanılacak χ^2 tablosu $P(\chi^2 > \chi_i^2) = \alpha$ olasılığını verecek şekilde düzenlenmiştir.
- Kullanılacak χ^2 tablosu bakılan değerden sonsuza kadar olan alanı verecek şekilde düzenlenmiştir.

Ki-kare dağılımı



Varyansın Güven Aralığı

Varyansın güven aralığının belirlenmesinde χ^2 dağılımının kullanımının temelinde örnek varyansı formülü bulunmaktadır. İşlemler aşağıdaki gibi açıklanabilir:

Örnek varyansı: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$

$\frac{n-1}{\sigma^2}\ S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2}$

Eşitliğin sağ tarafı (n-1) serbestlik derecesine sahip ki-kare dağılımıdır:

$\chi^2_{n-1} = \frac{n-1}{\sigma^2}\ S^2$

Varyansın güven aralığı:

$P(\chi^2_A < \chi^2 < \chi^2_B) = 1 - \alpha \rightarrow P(\chi^2_A < \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 < \chi^2_B) = 1 - \alpha$

$P(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_B} < \sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_A}) = 1 - \alpha$

$\chi^2_A = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ ve $\chi^2_B = \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

Örnek

Soru: Bir fabrikanın üretiminden rasgele alınan 20 birimlik örneğin varyansı 35 olarak belirlendiğine göre %99 güven düzeyinde fabrikanın üretimine (yani anakütleye) ait varyansın güven aralığını oluşturunuz.
Çözüm:

$$SD = n-1 = 20-1 = 19 \quad 1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \quad \alpha/2 = 0.005 \quad 1-\alpha/2 = 0.995$$

$$\frac{(20-1)35}{38.58} < \sigma^2 < \frac{(20-1)35}{6.84} \;\Rightarrow\; 17.237 < \sigma^2 < 97.222$$

Belirlenen aralık tahmini şöyle yorumlanabilir: %99 güven (doğruluk) düzeyinde sözü edilen fabrikanın üretimine ait varyansın 17.237 ile 97.222 arasında olacağı söylenebilir (veya bu aralıkta olması beklenir).

Standart Sapmanın Güven Aralığı

Örnek standart sapması Sanakütle standart sapması σnın bir nokta tahminidir. Standart sapmanın güven aralığı Z dağılımı yardımıyla aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$S - Z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{S}{\sqrt{2n}} < \sigma < S + Z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{S}{\sqrt{2n}}$$